SOURCES D'ERREURS DANS LE CALCUL DES DSP

par Christian Lalanne

Le calcul d'une densité spectrale de puissance (DSP) à partir d'une vibration aléatoire suppose que le signal accélérométrique traité est stationnaire, soit que ses propriétés statistiques ne varient pas avec le temps.

Par ailleurs, de manière générale, le signal est échantillonné en respectant le théorème de Shannon, avec une fréquence égale à deux fois la fréquence maximum du signal (f_{max}), ce qui suppose que f_{max} soit connue a priori. Pour éviter un repliement de spectre qui serait lié à une mauvaise connaissance de f_{max}, on filtre le signal à l'aide d'un filtre passe-bas pour éliminer de manière certaine les fréquences supérieures à la valeur de f_{max} souhaitée.

Christian Lalanne

a travaillé comme expert au CEA dans le domaine des vibrations et des chocs mécaniques où il a été à l'origine d'une méthode d'écriture des spécifications s'appuyant sur les spectres de réponse extrême et de dommage par fatigue.

Auteur de nombreuses publications, dont une série de cinq volumes, il est actuellement consultant et chargé de cours.

Le calcul d'une DSP peut faire l'objet d'imprécisions liées à :

- l'utilisation du filtre passe-bas
- l'erreur statistique.

Par ailleurs, lorsque la réponse d'une structure est déterminée à partir d'un signal en fonction du temps, le choix de la fréquence échantillonnage peut avoir une incidence sur la DSP de cette réponse.

Erreur liée au filtre passe-bas

Les filtres passe-bas doivent supprimer les fréquences supérieures à une certaine valeur. S'ils étaient parfait, ils auraient une forme rectangulaire dans le domaine des fréquences. En pratique, la pente du filtre à f_{max} n'est pas infinie. La suppression des fréquences est progressive.

Pour montrer l'influence de cette pente, on considère ci-dessous un signal vibratoire mesuré sur un avion en respectant le théorème de Shannon avec une fréquence d'échantillonnage égale à 5000 Hz pour une fréquence maximum du signal de 2500 Hz. Sa DSP est représentée sur la figure 1.

On utilise un filtre passe-bas non récursif pour supprimer les fréquences supérieures à 1000 Hz. La figure 2 montre les DSP calculées à partir du signal échantillonné à 5000 Hz (entre 0 et 1600 Hz) et à partir des signaux filtrés pour des pentes égales à 40 dB/oct et 80 dB/oct (même fréquence d'échantillonnage).

On constate que l'amplitude de la DSP est atténuée avant f_{max} = 1000 Hz, d'autant plus que la pente est plus petite.

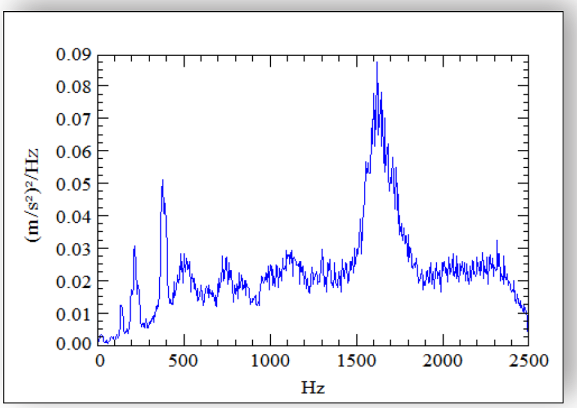

Figure 1 - ***DSP calculée à partir d'un signal échantillonné à 5000 Hz***

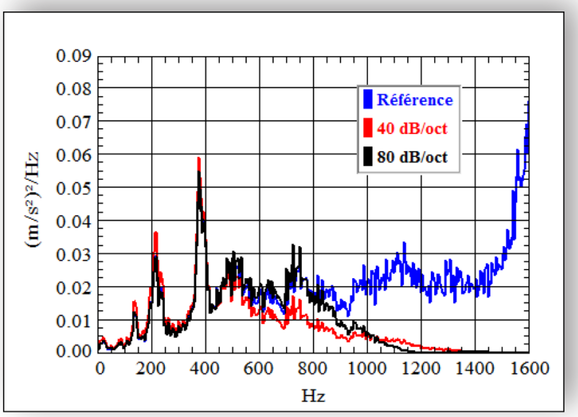

Figure 2 - ***Influence de la pente du filtre passe-bas sur la DSP***

Pour tenir compte de cette pente (p), on peut montrer **[1]** que le rapport entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence maximum doit être égal à :

$$\frac{f_{\text{échant}}}{f_{\text{max}}} = 2\ 10^{\frac{40}{p}\log_{10} 2}$$

Cette relation peut être utilisée de deux manières :

- soit pour choisir $f_{\text{échant}}$ pour une valeur souhaitée de f_{max} : la figure 3 montre qu'avec un filtre de pente 120 dB/oct, il faut que

$$f_{\text{échant}} \geq 2{,}52\ \ f_{\text{max}}$$

, règle souvent proposée dans la littérature,

- soit pour estimer la fréquence maximum pour laquelle la DSP sera correcte pour $f_{\text{échant}}$ donné. La figure 4 donne le rapport entre la fréquence f_{max} utilisable et la fréquence maximum théorique égale à $f_{\text{échant}}$ /2. Pour un filtre de pente 120 dB/oct, on obtient ainsi 0,79.

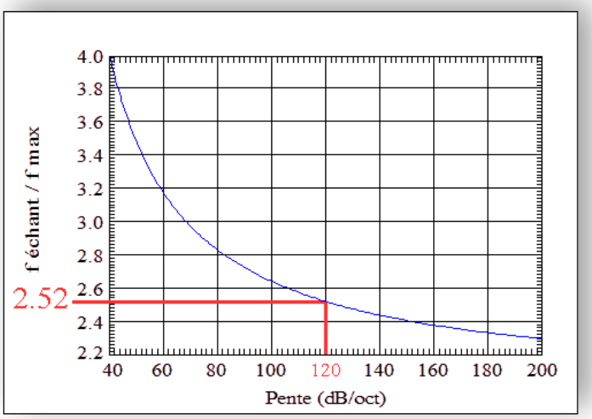

Figure 3 - ***Rapport** $f_{\text{échant}}$ / f_{max} **en fonction de p***

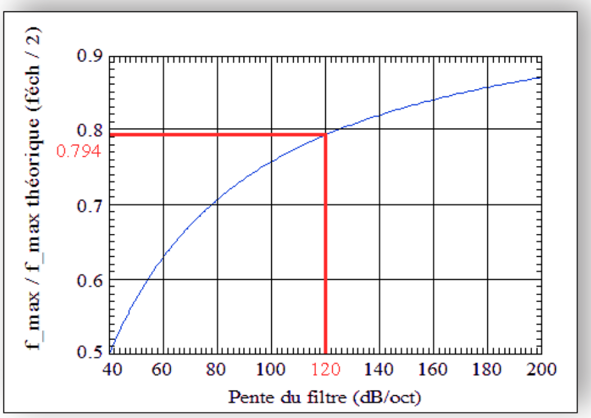

Figure 4 - ***Rapport** f_{max} / $f_{\text{max théorique}}$ **en fonction de p***

Conséquence

Considérons le signal correspondant à la figure 1, filtré à 1000 Hz avec un filtre de pente 80 dB/oct. Calculons la réponse à ce signal filtré d'un système linéaire à un degré de liberté dont la fréquence propre se situe dans la bande de fréquences où la DSP est modifiée par la pente du filtre, soit à 900 Hz , avec une surtension Q égale à 10. Les DSP de l'entrée et de la réponse sont tracées sur la figure 5.

La fonction de transfert, calculée à partir du rapport des DSP de la réponse et de l'entrée, présente un pic centré sur 900 Hz, mais avec une amplitude inférieure à 10 (figure 6).Cette «atténuation» est liée à la pente du filtre passe-bas (elle n'est pas imputable à la fréquence d'échantillonnage du signal, égale à 10 kHz).

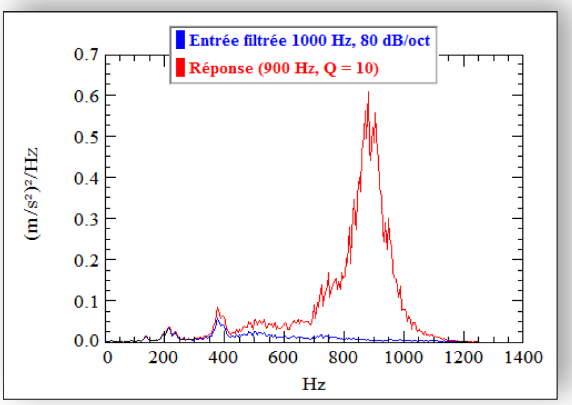

Figure 5 - ***DSP du signal filtré à 1000 Hz et de la réponse d'un système à 1 ddl 900 Hz –Q = 10***

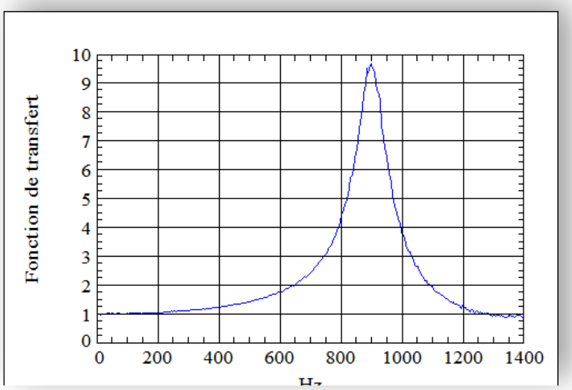

Figure 6 - ***Fonction de transfert calculée à partir des DSP de la figure 2***

Influence de l'erreur statistique

Le signal étant aléatoire en fonction du temps, la DSP d'un échantillon de courte durée est elle-même une variable aléatoire, ce qui conduit en réalité à caractériser le signal par une DSP moyenne pour chaque fréquence, calculée à partir de plusieurs échantillons de signal. On peut également calculer une variance.

La précision de la DSP ainsi calculée est d'autant meilleure que la variance est plus petite, soit que le rapport variance sur le carré de la moyenne est plus petit. Ce rapport est un coefficient de variation, dont la racine carrée est appelé ici ***erreur statistique*** ou ***erreur standard normalisée*** notée ε . Une règle de l'art suggère une valeur inférieure à 15%.

Si ˆG(f) est la DSP calculée à partir d'un échantillon, on montre que la quantité $\frac{\hat{G}(f)\,\chi_n^2}{n}$ suit une loi du χ_n^2 à n degrés de liberté, dont la moyenne et la variance sont respectivement n et 2n. D'où l'erreur standard normalisée : $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n}}$.

On montre par ailleurs que le nombre de degrés de liberté est égal à 2 T Δf où T est la durée de l'échantillon analysé et Δf est le pas en fréquence de la DSP (résolution). D'où **[2]** :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{T\,\Delta f}}$$

Lors du calcul des DSP, on oublie fréquemment d'évaluer cette erreur et de respecter la règle de l'art citée plus haut. La conséquence est une courbe très hachée, dont on peut estimer la valeur exacte G(f) (au niveau de confiance 68,3%) à partir de la valeur calculée ˆ G(f) en la situant dans l'intervalle :

$$\frac{\hat{G}(f)}{1+\varepsilon} < G(f) < \frac{\hat{G}(f)}{1-\varepsilon}$$

Remarque

Pour obtenir une erreur statistique ε_{NC} donnée correspondant à un niveau de confiance NC, il faut que l'erreur statistique au niveau de confiance 68,26… % soit égale à

$$\varepsilon_{0.68...} = \frac{\varepsilon_{NC}}{N^{-1}\left(\frac{1+NC}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{T\,\Delta f}}$$

(N^{-1} ( ) = loi Normale inverse), ce qui permet de choisir T et Δf correspondant à ε_{NC}.

La DSP obtenue avec présente de l'herbe sur son tracé, ce qui peut conduire à une erreur importante si on procède à des enveloppes de DSP.

Cette erreur statistique peut par ailleurs conduire à des incertitudes lors du calcul des fonctions de transfert H(f) entre deux points d'une structure à partir du rapport des DSP de la réponse et de l'entrée. Cette mauvaise évaluation peut par exemple poser problème quand on tente d'estimer la dégradation d'une structure soumise à des essais de fatigue en suivant l'évolution de l'amplitude de la fonction de transfert à une fréquence de résonance particulière.

Cas où la réponse est obtenue par calcul

On reprend le signal vibratoire dont la DSP est représentée sur la figure 1, échantillonné à 5000 Hz. Trois cas sont considérés, dans lesquels la résolution (pas Δf) est maintenue constante (1,22 Hz) et la durée du signal traité varie pour obtenir trois valeurs de l'erreur statistique (0,524; 0,402 et 0,128) : T = 2,87s, T = 6,35 s et T = 44,4 s.

A noter que seule la valeur 0,128 satisfait à la règle de l'art ($\varepsilon \le 15\%$).

On calcule numériquement la réponse d'un système mécanique à un seul degré de liberté, de fréquence propre f_0=1000 Hz et de surtension Q = 10, puis sa DSP dans les mêmes conditions (figures 7 à 9).

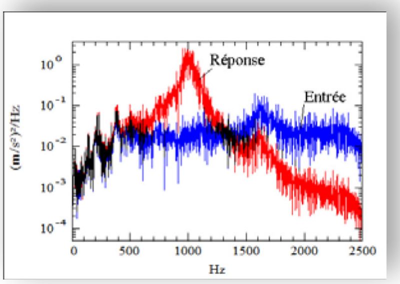

Figure 7 - ***DSP de l'entrée et de la réponse pour*** $\varepsilon = 0{,}524$

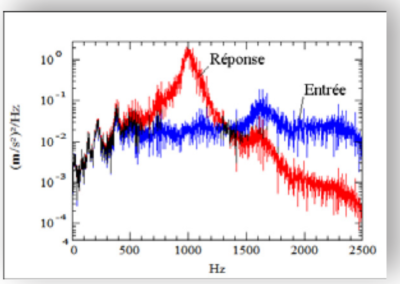

Figure 8 - ***DSP de l'entrée et de la réponse pour*** $\varepsilon = 0{,}402$

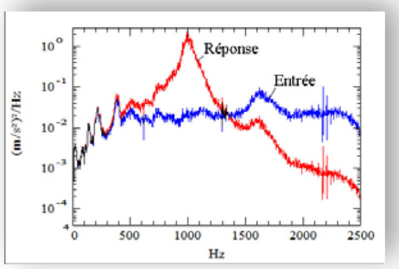

Figure 9 - ***DSP de l'entrée et de la réponse pour*** $\varepsilon = 0{,}128$

Les 3 fonctions de transfert calculées à partir de ces spectres sont toutes superposées : on note que l'erreur statistique a peu d'influence (figure 10).

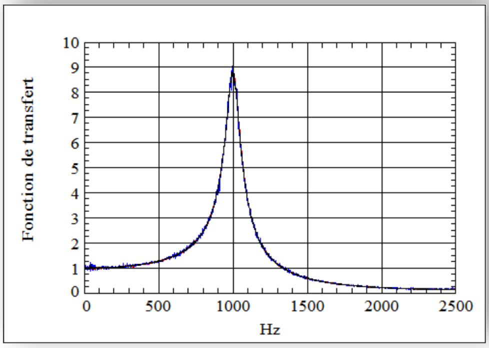

Figure 10 - ***Fonctions de transfert***

Mais la surtension mesurée sur ces courbes est égale à 9 au lieu de 10. Cet écart n'est pas imputable à l'erreur statistique, mais à la fréquence d'échantillonnage de chaque signal. Pour que ce calcul soit correct, on sait qu'il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale à 10 fois la fréquence maximum du signal, soit ici à 2500 Hz x 10 = 25000 Hz.

Dans le cas de la plus courte durée (soit de la plus grande erreur statistique), la fonction de transfert calculée après reconstruction du signal présente bien un pic d'amplitude proche de 10 à 1000 Hz (figure 11). L'erreur statistique conduit simplement à une petite incertitude sur cette valeur (figure 12).

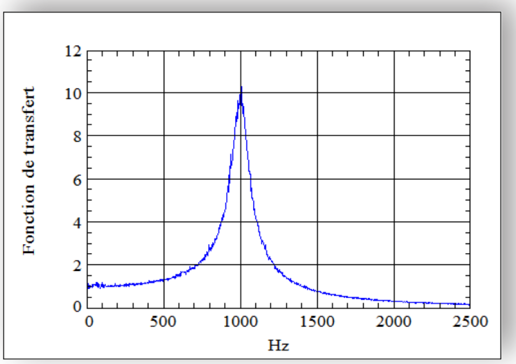

Figure 11 - ***Fonction de transfert après reconstruction du signal de durée 2,87 s***

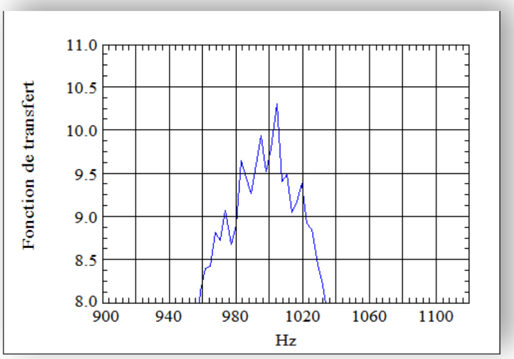

Figure 12 - ***Loupe sur le pic de la fonction de transfert obtenue à partir du signal reconstruit***

Cas où l'entrée et la réponse ont été mesurées

Quand la fonction de transfert est calculée à partir du rapport des DSP de mesures effectuées en deux points d'une structure, l'erreur statistique a une influence plus importante.

La figure 13 montre les fonctions de transfert obtenues pour plusieurs valeurs de cette erreur, les signaux étant toujours correctement échantillonnés (10390 Hz) et le pas en fréquence étant identique (5 Hz). On note sur la figure 14 que la valeur du pic est sensible à ε.

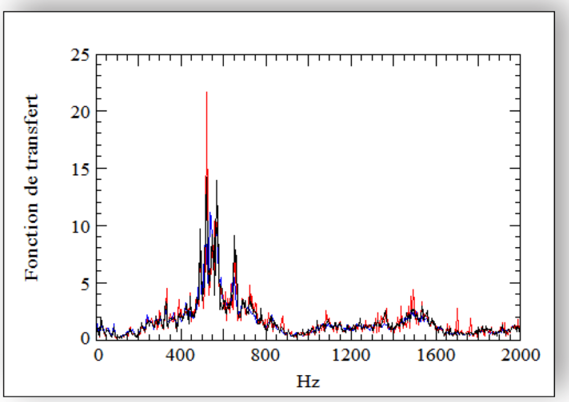

Figure 13 - ***Fonctions de transfert calculées à partir de DSP obtenues avec une erreur statistique égale à 16,1%, 35,4% et 50%***

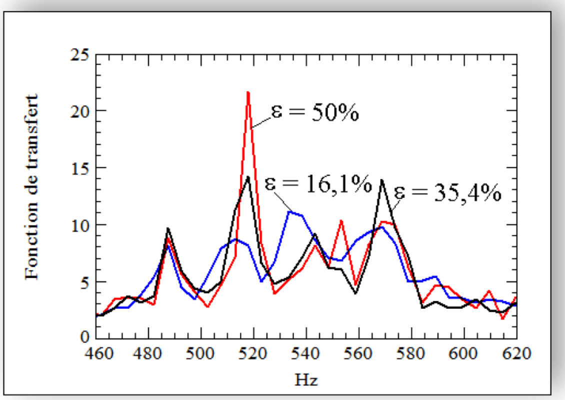

Figure 14 - ***Loupe sur les fonctions de transfert calculées à partir de DSP obtenues avec une erreur statistique égale à 16,1%, 35,4% et 50%***

Remarque

A partir du signal utilisé pour la DSP de la figure 1, on a calculé la DSP de la figure 15 en augmentant le nombre de points, soit en diminuant le pas en fréquence, ce qui a conduit à une erreur statistique de 41%.

Après plusieurs moyennes glissantes effectuées sur cette DSP, on obtient une courbe «lissée» très proche de celle qui serait calculée avec une erreur statistique correcte, ici 12% (Figure 16).

Les moyennes glissantes permettent de récupérer une DSP qui aurait été calculée avec une erreur statistique trop grande.

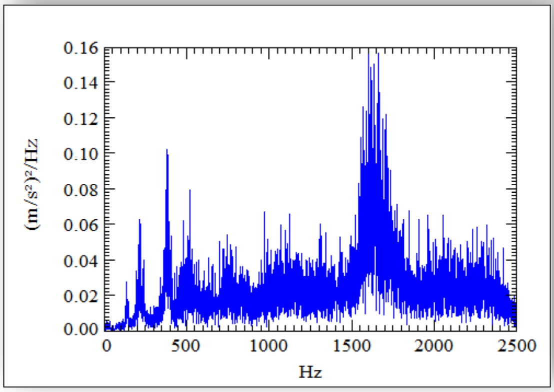

*Figure 15 - **DSP calculée avec une erreur statistique égale à 41%***

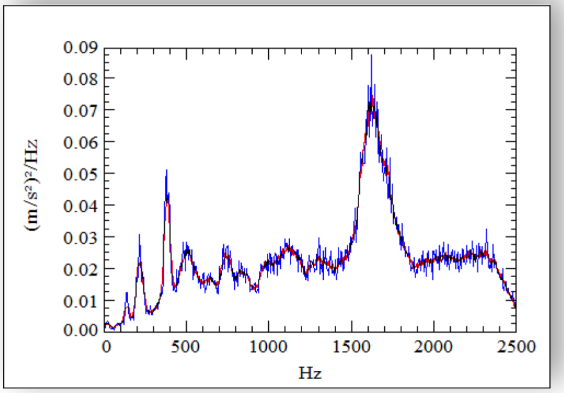

*Figure 16 - **DSP calculée avec une erreur statistique égale à 12% (en bleu) et DSP lissée sur 60 points***

Conclusions

Le filtre anti-repliement peut conduire à une erreur de la DSP à haute fréquence, du fait de sa pente à la fréquence de coupure.

L'erreur statistique conduit à une imprécision sur l'amplitude de la DSP. Elle devrait être inférieure à 15% et devrait toujours être indiquée sur les DSP calculées.

Son influence sur le calcul des fonctions de transfert :

- est peu marquée quand la réponse de la structure est calculée numériquement,

- peut être non négligeable quand on utilise des mesures recueillies en deux points d'une structure.

Elle peut en particulier conduire à une imprécision quand la fonction de transfert sert à estimer l'évolution de la résistance de la structure en fonction du temps dans un essai de fatigue.

Références :

[1] Mechanical Vibration and Shock Analysis, Sinusoidal Vibration, Volume 1, ISTE/Wiley 2014.

[2] Mechanical Vibration and Shock Analysis, Random Vibration, Volume 3, ISTE/Wiley 2014.

PCB PIEZOTRONICS
Immeuble DISCOVERY
Parc Technologique
Route de l'Orme
91190 SAINT AUBIN

Contact :
Maiwenn COURBOT
01 69 33 19 65
mcourbot@pcbpiezotronics.fr